ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 21, Nos. 2-3, 1975

QUELQUES PROPRIETES DES SYSTEMES DYNAMIQUES QUI SE DECOMPOSENT EN UN PRODUIT DE DEUX SYSTEMES DONT L'UN EST UN SCHEMA DE BERNOULLI

PAR

JEAN-PAUL THOUVENOT[†]

ABSTRACT

The purpose of this paper is to investigate some properties of dynamical systems that split into the product of two systems, one of them being a Bernoulli shift. With this view in mind, a relative version of the main results of D. S. Ornstein's theory of Bernoulli shifts is developed here.

Introduction

La notion de partition finiment déterminée a été introduite par D. S. Ornstein dans [7]. Elle caractérise les partitions qui engendrent des systèmes isomorphes à des schémas de Bernoulli.

On introduit ici une version conditionnelle de la définition d'une partition finiment déterminée qui est liée aux systèmes du titre. L'ensemble des propriétés qui en résultent (provenant essentiellement de l'analogie avec le cas classique) trouve son aboutissement dans les questions finales et dans les théorèmes de structure qu'elles conditionnent.

Le résultat principal est contenu dans la proposition 4. (On remarquera en particulier que cette proposition fournit une nouvelle démonstration du fait que les facteurs des schémas de Bernoulli sont encore des schémas de Bernoulli cf. [7]). Le lemme 1 est la reproduction du lemme 3′ de [6]; la démonstration en est donnée pour assurer la cohérence de l'ensemble.

Katznelson et Weiss ont donné également une démonstration du lemme 2 dans [3] théorème 2. La version non conditionnelle de la proposition 7 est

[†] Equipe de Recherche n°1 "Processus stochastiques et applications" dépendant de la Section n° 1 "Mathématiques, Informatique" associée au C.N.R.S.

Received June 9, 1974

donnée dans [9]. Le corollaire 7.2 ne figure qu'en raison de ses relations avec la question A.

Enfin, comme tous les résultats exposés ici se généralisent au cas de l'action de $\mathbf{Z}^n$, cf. [2] [3] et [13], on a choisi, à titre d'exemple, de donner dans ce cadre la démonstration complète de la majoration du plus petit nombre d'éléments p d'une partition génératrice en fonction de l'entropie h de l'action (prop. 6). La méthode utilisée est proche de celle donnée par M. Smorodinsky dans [11]. W. Krieger a obtenu la méilleure majoration $p \leqq (e^{(h)}) + 1$ pour des groupes plus généraux que $\mathbf{Z}^n$.

Preliminaires

Les préliminaires sont exactement ceux de [4] (aux erreurs de traduction près). Soit $(X, \mathcal{A}, m)$ l'espace de mesure correspondant à $(0, 1)$ muni de la mesure de Lebesgue. On condense $(X, \mathcal{A}, m)$ en X.

Soient p_i, $1 \leqq i \leqq k$, des ensembles disjoints dont la réunion est X. Nous considérons la partition $P = (p_1, \cdots, p_k)$ comme le vecteur des k ensembles avec un ordre donné. Une partition sera donc toujours ordonnée.

Etant donné A de mesure positive, on définit

$$m_A(B) = \frac{m(A \cap B)}{m(A)} \qquad \forall B \in \mathcal{A}.$$

Etant donnée une partition P, la partition induite sur A est $P/A = (p_i \cap A, 1 \leqq i \leqq k)$, la distribution de P/A est le vecteur

$$d(P/A) = (m_A(p_i);\ 1 \leqq i \leqq k).$$

En particulier $d(P) = d(P/X)$.

Soient P et Q des partitions, chacune à k ensembles et soient A et B des ensembles de mesure positive. On pose

$$d(P/A, Q/B) = \sum_{i=1}^{k} |m_A(p_i) - m_B(q_i)|.$$

En particulier $d(P, Q) = d(P/X, Q/X)$.

Nous posons aussi $|P - Q| = \sum_{i=1}^{k} m(p_i \Delta q_i)$.

Si P_1 est une réunion d'ensembles de P, nous écrivons $P_1 \subset P$. Etant données deux partitions P et Q, nous disons que P contient Q à ε près et nous écrivons

$P \supset^{\varepsilon} Q$ s'il existe une partition P' de X telle que les ensembles de P' soient des réunions d'ensembles de P et $|P' - Q| < \varepsilon$. On écrit $Q \subset P$ si $|P' - Q| = 0$.

Soit P à k ensembles et Q à l ensembles. La partition union de P et Q est $P \vee Q = (p_i \cap q_j, 1 \leqq i \leqq k, 1 \leqq j \leqq l)$ où l'ordre dans $P \vee Q$ est l'ordre lexicographique. (Ainsi $P \vee Q \neq Q \vee P$ en général.) Etant données des partitions $P_1 \cdots P_n$ l'associativité de $\vee$ entraîne que l'on peut écrire

$$\bigvee_{i=1}^{n} P_i = P_1 \vee P_2 \cdots \vee P_n.$$

On désigne indifféremment par $(P)_T$ ou $\vee_{-\infty}^{\infty} T^i P$ la plus petite σ-algèbre contenant tous les ensembles de $T^i P$, $i \in \mathbf{Z}$. L'espace de mesure $(X, \vee_{-\infty}^{\infty} T^i P, m)$ est appelé X_P.

On dit que P est ε-indépendante de Q s'il existe une partie $Q_1 \subset Q$ telle que la mesure de la réunion de tous les atomes de Q_1 soit plus grande que $1 - \varepsilon$ est telle que $d(P/q, P) < \varepsilon$, $q \in Q_1$.

Etant donné P et T automorphisme de X, le P-n-nom de $x \in X$ est la suite des entiers $f(i)$, $0 \leqq i < n$ telle que $T^i x \in P_{f(i)}$, $0 \leqq i < n$. Si F est un ensemble dont tous les points ont le même P-n-nom, alors on parle de P-n-nom de F.

Etant données des transformations T_1 et T_2 et des partitions P_1 et P_2, on écrit $(P_1, T_1) \sim (P_2, T_2)$ si

$$d\Big(\bigvee_{0}^{n} T_1^i P_1\Big) = d\Big(\bigvee_{0}^{n} T_2^i P_2\Big), \quad i = 0, 1, 2, \cdots.$$

Soient $T^i F$, $0 \leqq i \leqq n$ des ensembles disjoints. Soit R_i une partition de $T^i F$ pour chaque i.

Nous désignerons l'ensemble des couples $G = \{(T^i F, R_i), 0 \leqq i \leqq n\}$ sous le nom de gadget. Remarquons que $T^{-i} R_i$ est une partition de F.

Etant donné un gadget $G' = \{(T'^i F', R_i), 0 \leqq i \leqq n\}$ nous disons que G et G' sont isomorphes et nous écrivons $G \sim G'$ si

$$d\Big(\bigvee_{0}^{n} T^{-i} R_i\Big) = d\Big(\bigvee_{0}^{n} T'^{-i} R'_i\Big).$$

Soit $W = \vee_{-n}^{n} T^i P$ où $P = (p_1, \cdots, p_k)$ ainsi $w \in W$ entraîne

$$w = \bigcap_{-n}^{n} T^i P_{j(i)}, \quad 1 \leqq j(i) \leqq k, \quad -n \leqq i \leqq n.$$

On écrit aussi:

$$w = (j_{-n}, \cdots, j_0, j_1, \cdots, j_n).$$

Soit S_n l'ensemble des suites consistant en les coefficients $1, 2, \cdots, k$ de longueur $2n+1$. Ainsi nous pouvons considérer $w \in W$ comme un élément de S_n. Une partition L de S_n engendre une partition L_p de X comme suit. Soit

$$L = (l_1, l_2, \cdots, l_r) \text{ et définissons}$$

$$L_p = \Big(\bigcup_{w \in l_i} w,\ 1 \leqq i \leqq r \Big).$$

Nous considérons maintenant une transformation T_1 et une partition $R = (r_1, r_2, \cdots, r_k)$. Soit $Q = \vee_0^u T_1^i R$. Si $q \in Q$, alors

$$q = \bigcap_0^u T_1^i r_{s_i}, \quad 1 \leqq s_i \leqq k, \quad 0 \leqq i \leqq u.$$

On écrit $q = (s_u, s_{u-1}, \cdots, s_0)$. Soit $l = (l_0, l_1, \cdots, l_{n-1})$ une suite de longueur $n > u$, où $1 \leqq l_i \leqq k$, $0 \leqq i < n$.

Soit $N(l, q)$ le nombre de fois où q apparait comme une sous-suite d'éléments consécutifs dans l_i. Donc $N(l, q) \leqq n - u$.

Soit $\varepsilon > 0$. Nous définissons l comme une ε-suite pour Q si

$$\left| \frac{N(l,q)}{n} - m(q) \right| < \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad q \in Q.$$

LEMME I [4]. *Soient P, T_1 et Q comme ci-dessus et $\varepsilon > 0$. Soit T une transformation telle que $T^i B_j$, $0 \leqq i < n$, $1 \leqq j \leqq J$ soient des ensembles disjoints avec $u/n < \varepsilon/3$. Soit*

$$X_1 = \bigcup_{i=0}^{n-1} \bigcup_{j=1}^{J} T^i B_j$$

vérifiant $m(X_1) > 1 - \varepsilon/3$. Soient $l_j = (l_{j;i}, 0 \leqq i \leqq n)$ $1 \leqq j \leqq J$ des $\varepsilon/3k^{u+1}$ suites pour Q. Soit $P = (p_1, \cdots, p_k)$ la partition définie sur X_1 par $T^i B_j \subset P_{l_{j;i}}$, $0 \leqq i < n$, $1 \leqq j < J$. Soit P définie arbitrairement sur $X - X_1$.

Alors $d(\vee_0^u T^i P, Q) < \varepsilon$.

Si les suites l_j, $1 \leqq j \leqq J$ sont distinctes, alors

$$\bigvee_{-n}^{n} T^i (P \vee \{B, B^c\}) \supset \{T^i B_j : 0 \leqq i < n, 1 \leqq j \leqq J\}$$

où $B = \bigcup_{j=1}^{J} B_j$.

Soient T_1, R et Q comme ci-dessus.

Pour $q = \bigcap_0^u T_1^i r_{s_i}$ nous écrivons $q = (s_n, \cdots, s_1, s_0)$. Soit $L_n = \vee_0^{n-1} T_i^{-i} R$ alors nous écrivons $l = \bigcap_0^{l-1} T_1^{-i} r_{l_i} \in L_n$ comme $l = (l_0, l_1, \cdots, l_{n-1})$.

LEMME II [4]. *Soit T_1 ergodique, $a > 0$ et $b > 0$. Il existe un n suffisamment grand et $L' \subset L_n$ tel que $m(L') > 1 - a$ et $l \in L'$ entraîne que l est une b-suite pour Q.*

LEMME III [10]. *Soit P une partition d'entropie finie. Pour tout $1 > \varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que si $E(P/Q) > E(P) - \delta(\varepsilon)$. Alors $P \perp^{\varepsilon} Q$.*

DÉFINITION 1. Soit T un automorphisme ergodique de X, H et P deux partitions finies de X. On dit que P est H-conditionnellement finiment déterminée si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et n entier positif tels que pour tout automorphisme ergodique T' de Y, les conditions suivantes

(1) $$d\Big(\bigvee_0^m T'^i H'\Big) = d\Big(\bigvee_0^m T^i H\Big) \quad \text{pour tout } m$$

(2) $$d\Big(\bigvee_0^n T'^i (P' \vee H'),\ \bigvee_0^n T^i (P \vee H)\Big) < \delta$$

(3) $$|E(P \vee H, T) - E(P' \vee H', T')| < \delta$$

entraînent:

Il existe Z et, pour tout entier $p > 0$, des suites de partitions de Z, H_i, P_i, P'_i $0 \leqq i \leqq p$ telles que:

(4) $$d\Big(\bigvee_0^p T^i (P \vee H)\Big) = d\Big(\bigvee_0^p (P_i \vee H_i)\Big)$$

(5) $$d\Big(\bigvee_0^p T'^i (P' \vee H')\Big) = d\Big(\bigvee_0^p (P'_i \vee H_i)\Big)$$

(6) $$|P_i - P'_i| < \varepsilon.$$

LEMME 1 (cf. [6] lemme 3'). *Soit T un automorphisme ergodique de X, H une partition finie de X et P une partition idéale avec k atomes satisfaisant $E(P) + E(H, T) = E(T)$. Alors étant donné $\varepsilon > 0$, il existe δ (qui ne dépend que de k et de ε) tel que si $\bar{P}$ est une partition finie de X vérifiant*

(a) $$d(\bar{P}, P) < \delta$$

(b) $$|E(\bar{P} \vee H, T) - E(T)| < \delta$$

alors on peut trouver une espace Y et, pour tout n, des suites de partitions de Y, P_i, H_i, $\bar{P}_i$ $0 \leqq i \leqq n$ satisfaisant (a′) $$d\Big(\bigvee_0^n (\bar{P}_i \vee H_i)\Big) = d\Big(\bigvee_0^n T^i(\bar{P} \vee H)\Big)$$

(b′) $$d(P_i) = d(P)$$

(c′) *La partition* $\bigvee_0^n P_i$ *est indépendante de* $\bigvee_0^n H_i$ *et les partitions* P_i $0 \leqq i \leqq n$ *sont indépendantes.*

(d′) $$|P_i - \bar{P}_i| < \varepsilon.$$

(Ce lemme dit exactement que si T_1 est le schéma de Bernoulli sur $P^{\mathbf{Z}} = X_1$ et si T_2 est la restriction de T à $X_2 = H_T = \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i H$, alors dans $X_3 = X_1 \times X_2$ muni de l'automorphisme $T_3 = T_1 \times T_2$, P est H-conditionnellement finiment déterminée. Dans ce cas particulier le n de la définition 1 vaut 1).

Démonstration. D'après la formule de Pinsker

(1) $E(\bar{P} \vee H, T) = E(H, T) + E(\bar{P} \mid (\bigvee_{-1}^{-\infty} T^i \bar{P} \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i H))$. Il en résulte

(2) $E(\bar{P} \vee H, T) \leqq E(H, T) + E(T^i \bar{P} \mid (\bigvee_0^n T^j H \; \bigvee_0^{i-1} T^j \bar{P}))$ $0 \leqq i \leqq n$

(3) Si δ est assez petit, alors b et le lemme III entraînent que $T^i \bar{P}$ est $\varepsilon/2$-indépendante de $(\bigvee_0^n T^j H \; \bigvee_0^{i-1} T^j \bar{P})$.

(4) Supposons que soient déjà données P_i et $\bar{P}_i$ $0 \leqq i \leqq m$, $m < n$ ainsi que H_i $0 \leqq i \leqq n$ satisfaisant

(a″) $d(\bigvee_0^m (\bar{P}_i \vee H_i)) = d(\bigvee_0^m T^i(\bar{P} \vee H))$

(b″) $d(P_i) = d(P)$

(c″) $d(\bigvee_0^n T^j H) = d(\bigvee_0^n H_j)$; $\bigvee_0^m P_i$ est indépendante de $\bigvee_0^n H_j$, et les partitions P_i $0 \leqq i \leqq m$ sont indépendantes.

(d″) $|P_i - \bar{P}_i| < \varepsilon$ $0 \leqq i \leqq m$.

Soit A un atome de $\bigvee_0^n H_i \bigvee_0^m \bar{P}_i$ et soit A' un atome inclus dans A de $\bigvee_0^n H_i \bigvee_0^m (P_i \vee \bar{P}_i)$.

Soit A_1 l'atome correspondant à A dans $\bigvee_0^n T^i H \; \bigvee_0^m T^i \bar{P}$. Choisissons $\bar{P}_{m+1} \cap A'$ de façon que:

(e) $d(\bar{P}_{m+1} \mid A') = d(T^{m+1} \bar{P} \mid A_1)$.

Choisissons $P_{m+1} \cap A'$ de façon que:

$d(P_{m+1} \mid A') = d(P)$ et que si

(f) $d(T^{m+1} \bar{P} \mid A_1, P) < \varepsilon/2$ on prenne P_{m+1} de façon que $|(P_{m+1} \mid A') - (\bar{P}_{m+1} \mid A')| < \varepsilon/2$. (Ce qui peut être fait d'après (e)).

L'hypothèse (a) (avec $\delta < \varepsilon/2$) et (3) entraînent que (f) est vrai sauf pour une famille d'atomes A dont la réunion a une mesure plus petite que $\varepsilon/2$. Par conséquent $|\bar{P}_{m+1} - P_{m+1}| < \varepsilon$. (d″) (a″) et (b″) sont donc vérifiées au rang $(m+1)$

et comme P_{m+1} est indépendante de $\bigvee_0^n H_i \bigvee_0^m P_i$, l'hypothèse (c'') au rang m entraîne (c'') au rang $(m+1)$.

LEMME 2. (cf. [3] théorème 2). *Soit S une partition finie de X. Soit T un automorphisme ergodique de X. (X est supposé sans atomes.) Soit n un entier positif, soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe F dans X tel que les ensembles T^iF $0 \leqq i \leqq n$ soient disjoints et tels que $m(\bigcup_0^n T^iF) > 1-\varepsilon$ et $d(S \mid F) = d(S)$.*

DÉMONSTRATION. Soit Y un espace fini à n points $\{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}\}$ chaque point étant de masse $1/n$.

Soit T_1 l'application $x_i \to x_{i+1}$ (mod n). Soit K la partition $(\{x_0\}, \{\bigcup_{i=1}^{n-1} x_i\})$ de Y. Alors $\bigvee_0^n T_1^i K = Y$.

Considérons $Z = Y \times X$ et prolongeons T à Z par $T(u,v) = (T_1u, Tv)$. Soit p un entier positif tel que $n^2/p < \varepsilon_1/2$. Appliquant un théorème de Rokhlin, nous pouvons trouver un ensemble F_1 dans X tel que les $T^{-i}F_1$ $0 \leqq i \leqq p$ soient disjoints et tels que $m(\bigcup_0^p T^{-i}F_1) > 1-\varepsilon_1/2$.

Considérons le gadget G obtenu en partitionnant chaque $T^{-i}F_1$ par S. Soit G_1' pour désigner G comme un gadget dans Z et G_2' pour désigner G comme un gadget dans X. Alors $G_1' \sim G_2'$. Formons le gadget G_1 à partir de $T^{-i}F_1$ $0 \leqq i \leqq p$ en partitionnant chaque $T^{-i}F_1$ par $S \vee K$. Alors G_1 est un gadget dans Z. Nous pouvons choisir une partition K' dans X de façon à former un gadget G_2 à partir de $T^{-i}F_1$ $0 \leqq i \leqq p$ en partitionnant chaque $T^{-i}F_1$ par $S \vee K'$ de façon que $G_2 \sim G_1$. Soit K'' la restriction de K' à $\bigcup_0^{p-n} T^{-i}F_1$. Soit F_2 dans K'' l'ensemble correspondant à $\{x_0\}$ dans K. Alors $m(\bigcup_0^n T^iF_2) > 1 - n^2/p - \varepsilon_1/2 > 1-\varepsilon_1$ et les T^iF_2 $0 \leqq i \leqq n$ sont disjoints. Enfin si $X_2 = \bigcup_0^n T^iF_2$ et si S_2 est la trace de S sur X_2 $d(S_2 \mid F_2) = d(S_2)$. Quand $m(X_2) \to 1$ $d(S_2) \to d(S)$ et si $d(S_2, S)$ est assez petite, on peut trouver $F \subset F_2$ tel que $d(S \mid F) = d(S)$ et $m(\bigcup_{i=0}^n T^iF) > 1-\varepsilon$ si ε_1 a été choisi assez petit.

LEMME 3. *Soit T_1 une transformation ergodique de Y, H_1 et P_1 deux partitions finies de Y (H_1 a l éléments, P_1 a k éléments) telles que P_1 soit H_1-conditionnellement finiment déterminée.*

Soit T un automorphisme ergodique de X tel que $E(T) = E(P_1 \vee H_1, T_1)$. Soit H une partition de X telle que $(H, T) \sim (H_1, T_1)$. Soit P une partition à k éléments de X telle que

$$d\left(\bigvee_0^n T^i(P \vee H), \bigvee_0^n T_1^i(P_1 \vee H_1)\right) < \delta \tag{1}$$

$$E(T) - E(P \vee H, T) < \delta \tag{2}$$

avec n et δ pris pour $\varepsilon^2/3$ dans la définition 1.

(3) $$E(T)-E(P\vee H,T)>0.$$

Soit $\varepsilon'>0$. Soit u un entier positif.

Soit $\gamma>0$ $(\gamma<\varepsilon)$. Soit Q un raffinement de $P\vee H$ tel que $\beta=E(T)-E(Q,T)>0$. Alors pour tout $n>N$ on peut trouver une famille d'atomes K_n dans $\vee_0^{n-1}T^{-i}Q$ dont la réunion aura une mesure plus grande que $1-\gamma$ et une application ϕ de K_n dans l'ensemble des atomes de $\vee_0^{n-1}T_1^{-i}(P_1\vee H_1)$ possédant les propriétés suivantes:

(3) *ϕ est injective.*

(4) *Le H_1-n-nom de $\phi(x)$ est le même que H-n-nom de x.*

(5) *Pour tout x de K_n le $(H_1\vee P_i)$-n-nom de $\phi(x)$ est une*

$$\frac{\varepsilon'}{3(k+l)^{u+1}}\text{-suite pour}\quad \bigvee_0^u T_1^i\,(H_1\vee P_1).$$

(6) *Pour une famille d'atomes $L_n\subset K_n$ dont la réunion a une mesure plus grande que $1-\varepsilon$ le P-n-nom de x diffère du P_1-n-nom de $\phi(x)$ en moins de $n\varepsilon$ endroits.*

DÉMONSTRATION.

(1) Pour $n>N_1$, il existe une famille K'_n d'atomes de $\vee_0^{n-1}T^{-i}Q$ dont la réunion a une mesure plus grande que $1-\gamma/10$ et telle que si $k\in K'_n$ $m(k)$ soit compris entre $2^{-(E(Q,T)\pm\beta/10)n}$.

(2) Pour $n>N_2$ il existe dans $\vee_0^{n-1}T_1^{-i}(P_1\vee H_1)$ une famille A_n d'atomes dont la réunion a une mesure plus grande que $1-\gamma/10$ et telle que si $a\in A_n$ on ait

(α) $m(a)$ est compris entre $2^{-(E(T)\pm\beta/10)n}$ et

(β) Le $(H_1\vee P_1)$-n-nom de a est une $\varepsilon'/(3(k+l)^{u+1})$-suite pour $\vee_0^u T_1^i\,(H_1\vee P_1)$. (lemme II).

(3) Pour $n>N_3$, $8n\beta>10$.

Soit maintenant $n>\sup(N_1,N_2,N_3)$.

(4) Comme P_1 est H_1-conditionnellement finiment déterminée, les hypothèses (1) et (2) assurent qu'on peut trouver une suite de partitions de $X\bar{P}_i$ $0\leqq i\leqq n-1$ telles que

(α) $d(\vee_0^{n-1}(\bar{P}_i\vee T^{-i}H))=d(\vee_0^{n-1}T_1^{-i}(P_1\vee H_1))$

(β) $|\bar{P}_i-T^{-i}P|<\varepsilon^2/3$.

Soit E l'ensemble des points dont le $\bar{P}$-n-nom et le P-n-nom diffèrent en plus de $n\varepsilon$ endroits; soit $X_i(\omega)$ $0\leqq i\leqq n-1$ la variable aléatoire qui vaut 0 si ω est situé dans les atomes de même nom de $\bar{P}_i$ et de $T^{-i}P$, 1 sinon. Alors

$$\int \sum_{i=0}^{n-1} X_i \leqq \frac{n\varepsilon^2}{3} \text{ d'après (4) } (\beta)$$

$$\frac{n\varepsilon^2}{3} \geqq \int_{\underset{E}{\underset{\|}{\{\Sigma X_i \geqq n\varepsilon\}}}} \Sigma X_i \geqq n\varepsilon m(E) \text{ i.e. } m(E) \leqq \frac{\varepsilon}{3}.$$

(5) Soit L_n la classe des $k \in K'_n$ tels que plus de la moitié de k soit recouverte par des $a \in A_n$ tels que le P-n-nom de k et le $\bar{P}$-n-nom de a diffèrent en moins de $n\varepsilon$ endroits. Soit $k \in K'_n$ $k \notin L_n$.

Soit $K = \{\omega \in X \mid \omega \in A_n^c \cap k$ ou bien $\omega \in E \cap A_n \cap k\}$.
$m(K) \geqq 2m(k)$ et par conséquent
$m(K'_n - L_n) = \Sigma_{k \in K'_n - L_n} m(k) \leqq 2(m(A_n^c) + m(E))$
$m(K'_n - L_n) \leqq 2(\gamma/10 + \varepsilon/3)$.
(1) entraîne alors $m(L_n) > 1 - \varepsilon$.

(6) On va définir ϕ sur L_n.

(α) Remarquons que (3), (1) et (2) entraînent que la mesure de chaque k dans L_n est plus grande que deux fois la mesure de chaque a dans A_n.

(β) Soit Ψ l'application qui à tout k de L_n associe l'ensemble des a de A_n tels que $m(a \cap k) > 0$ et que le $\bar{P}$-n-nom de A diffère du P-n-nom de a en moins de εn endroits. Soit t un entier positif et T une réunion de t atomes de L_n. Soit $\Psi(T) = \bigcup_{k \in T} \Psi(k)$. La mesure de la réunion des a dans $\Psi(T)$ est plus grande que la moitié de la mesure de la réunion des k dans T. Alors (α) entraîne que le nombre de a dans $\Psi(T)$ est plus grande que t. Le lemme des mariages nous assure donc l'existence de ϕ sur L_n satisfaisant aux conditions (3) (5) (6).

Comme $m(k \cap \phi(k)) > 0$, k et $\phi(k)$ ont le même H-n-nom, ce qui donne (4).

(7) On va prolonger ϕ à K_n de telle manière que la mesure de la réunion des atomes de K_n soit plus grande que $1 - \gamma$.

Soit H_n dans $\bigvee_0^{n-1} T^{-i}H$ tel que si $h \in H_n$, plus de la moitié de h soit recouverte par des atomes de A_n. Si $h \in H_n^c$, $h' = h \cap A_n^c$ vérifie $2m(h') \geqq m(h)$ et donc la mesure de la réunion des atomes de H_n est plus grande que $1 - 2\gamma/10$. Si $h \in H_n$ il contient plus de $m(h)/2 \cdot 2^{(E(T)-\beta/10)n}$ atomes de A_n et moins de $m(h)2^{(E(Q,T)+\beta/10)n}$ atomes de K'_n.. Il y a donc d'après (3) plus d'atomes dans $A_n \cap h$ que dans $K'_n \cap h$. On peut donc prolonger ϕ sur $H_n \cap K'_n$ de manière à satisfaire (3), (4), (5) et (6). K_n est égal à $(H_n \cap K'_n) \cup L_n$ et donc $m(K_n) > 1 - \gamma$.

LEMME 4. *Soit T_1 un automorphisme ergodique de Y, H_1 et P_1 deux partitions finies de Y (P_1 a k éléments, H_1 a l éléments) telles que P_1 soit H_1-conditionnellement finiment déterminée. Soit $X_1 = \bigvee_{-\infty}^{\infty} T_1^i H_1$ et T_1' la restriction de T_1 à X_1. Soit B une partition idéale à k éléments telle que $E(B) = E(P_1 \vee H_1, T_1) - E(H_1, T_1)$. Sur $X_2 = B^{\mathbf{Z}}$ soit T_2 le schéma de Bernoulli; sur $X = X_1 \times X_2$ on considère l'automorphisme $T = T_1' \times T_2$. T est ergodique et d'entropie $E(P_1 \vee H_1, T_1)$. (Si $E(P_1 \vee H_1, T_1) = E(H_1, T_1)$ $X = X_1$ et $T = T_1'$).*

Soit H dans X l'image de H_1 dans X_1 (($H, T) \sim (H_1, T_1$)).

Soit P une partition de X telle que

$$d\left(\bigvee_0^n T^i(P \vee H), \bigvee_0^n T_1^i(P_1 \vee H_1)\right) < \delta \tag{1}$$

avec n et δ pris pour $\varepsilon^2/3$ dans la définition 1.

$$E(T) - E(P \vee H, T) < \delta \tag{2}$$

$$E(T) - E(P \vee H, T) > 0. \tag{3}$$

Alors étant donné $\varepsilon' > 0$ et u entier positif nous pouvons trouver une partition $\tilde{P}$ de X (à k éléments) telle que

$$d\left(\bigvee_0^u T^i(P \vee H), \bigvee_0^u T_1^i (P_1 \vee H_1)\right) < \varepsilon' \tag{4}$$

$$E(\tilde{P} \vee H, T) > E(T) - \varepsilon' \tag{5}$$

$$|P - \tilde{P}| < 6\varepsilon \tag{6}$$

$$E(T) > E(\tilde{P} \vee H, T). \tag{7}$$

DÉMONSTRATION.

(1) Choisissons Q plus fine que $P \vee H$ telle que

(α) $E(T) - E(Q, T) = \beta > 0$

(β) Si Q' vérifie $|Q - Q'| < \gamma$, $\gamma < \min(\varepsilon, \varepsilon')$ alors

$$E(Q', T) > E(T) - \frac{\varepsilon'}{5}.$$

(2) Choisissons $n > N(\beta, \gamma/10)$ du lemme précédent pour que

$$-\frac{1}{n}\log_2 \frac{1}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \log_2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{\varepsilon'}{5} \text{ et que } \frac{u}{n} < \frac{\varepsilon'}{5}.$$

(3) Il existe alors une famille K_n d'atomes de $\vee_0^{n-1} T^{-i}Q$ dont la réunion, K, est de mesure plus grande que $1-\gamma/10$ et sur laquelle on peut construire une application ϕ satisfaisant aux conditions (3), (4), (5) et (6) du lemme 3.

(4) En utilisant le lemme 2, on peut construire un ensemble F tel que

$$(\alpha) \qquad \text{les } T^iF, \quad 0 \leqq i \leqq n-1 \text{ soient disjoints.}$$

$$(\beta) \qquad m\left(\bigcup_0^{n-1} T^iF\right) > 1 - \frac{\gamma}{10}.$$

$$(\gamma) \qquad d\left(\bigvee_0^{n-1} T^{-i}Q \,|\, F\right) = d\left(\bigvee_0^{n-1} T^{-i}Q\right).$$

(5) On définit $\tilde{P}$ sur $\bigcup_0^{n-1} T^i(F \cap K)$. Si a est un atome de $\vee_0^{n-1} T_1^{-i}(P_1 \vee H_1)$, on a $a = \bigcap_0^{n-1} T_1^{-i} l_{ai}$ où $P_1 \vee H_1 = (l_1 \cdots l_{k+l})$. Soit b un atome de $F \cap K_n$; soit $a = \phi(b)$. T^rb $0 \leqq r \leqq n-1$ sera dans l'atome de $\tilde{P}$ de même nom que l'atome de P dans lequel se situe l_{a_r}.

Définissons $\tilde{P}$ arbitrairement sur

$$X_1 = X - \bigcup_0^{n-1} T^i(F \cap K)(m(X_1) < 2\gamma/10 < \varepsilon'/3).$$

(6) $\tilde{P}$ satisfait la conclusion (4): c'est une conséquence du lemme I, de (5), de la conclusion (5), du lemme 3 et de (4) (β).

Vérifions la conclusion (6).

$$|P - \tilde{P}| \leqq 2\left(m(X_1) + \sum_{b \in F \cap L_n} n\varepsilon m(b) + n \sum_{b \in F \cap \{K_n - L_n\}} m(b)\right)$$

$$|P - \tilde{P}| \leqq 2(\varepsilon + \varepsilon + n\varepsilon m(F)) < 6\varepsilon.$$

(La majoration obtenue pour le dernier terme provient de (4) (γ) et de la conclusion (6) du lemme 3.)

La conclusion (5) se vérifie en remarquant que, d'après (3) et (4) du lemme 3, ainsi que d'après le lemme I, $R = \vee_{-n}^{n} T^i((\tilde{P} \vee H) \vee \{G, G^c\}) \supset \{T^ib$ quel que soit $b \in F \cap K_n$ $0 \leqq i \leqq n-1\}$ où G désigne $F \cap K$.

Donc $R \supset Q'$ telle que $|Q - Q'| < 2\gamma/10$. Et $E(\tilde{P} \vee H \vee \{G, G^c\}, T) = E(R, T) \geqq E(Q', T) > E(Q, T) - \varepsilon'/5$. (1) ($\beta$) et (2) entraînent (5). Pour prouver (7), supposons que $E(\tilde{P} \vee H, T) = E(T)$. Etant donné $a > 0$, il existe k tel que $\vee_{-k}^{k} T^i(B \vee H) \supset^a \tilde{P}$. Choisissons B' dans X_2 tel que $|B' - B| < a/(2k+1)$ et $E(B', T) \leqq E(B') < E(B)$. Alors $\vee_{-k}^{k} T^i(B' \vee H)$ contient une partition P_1 telle que $|P_1 - \tilde{P}| < 2a$ et $E(P_1 \vee H, T) \leqq E(H, T) + E(B', T) < E(T)$. Si a a été choisi suffisamment petit, toutes les inégalités précédentes sont encore vérifiées si on remplace $\tilde{P}$ par P_1.

PROPOSITION 1. *Soit $(P_1 \vee H_1, T_1)$ tel que P_1 soit H_1-conditionnellement finiment déterminée. Soit $(B \vee H, T)$ tel que $(H, T) \sim (H_1, T_1)$, $\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i B \perp \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i H$, les $T^i B$ $i \in Z$ soient indépendantes, et $E(B \vee H, T) = E(P_1 \vee H_1, T_1)$. Soit $X = \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i (B \vee H)$.*

Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et n entier positif tels que si P' est une partition de X satisfaisant

$$(1) \qquad d\left(\bigvee_0^n T_1^i (P_1 \vee H_1), \ \bigvee_0^n T^i (P' \vee H) \right) < \delta$$

$$(2) \qquad 0 < E(P_1 \vee H_1, T_1) - E(P' \vee H, T) < \delta.$$

Alors il existe une partition P de X telle que

$$(3) \qquad |P' - P| < \varepsilon$$

$$(4) \qquad (P \vee H, T) \sim (P_1 \vee H_1, T_1).$$

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence du lemme précédent.

COROLLAIRE 1.1 *Soit $(P_1 \vee H_1, T_1)$ tel que P soit H_1-conditionnellement finiment déterminée. Alors si $E(P_1 \vee H_1, T_1) = E(H_1, T_1)$, P_1 est $\bigvee_{-\infty}^{\infty} T_1^i H_1$ mesurable.*

Dans le lemme qui suit nous établissons une nouvelle version du lemme 4 pour des partitions P et H satisfaisant aux conditions du lemme 1.

LEMME 5. *Soit T une transformation ergodique de X et H une partition de X. Soit I une partition abstraite à k éléments telle que*

$$E(I) = E(T) - E(H, T).$$

Soit P une partition de X à k éléments satisfaisant

$$(1) \qquad d(P, I) < \delta\left(\frac{\varepsilon^2}{3}, k\right)$$

$$(2) \qquad E(T) - E(P \vee H, T) < \delta\left(\frac{\varepsilon^2}{3}, k\right)$$

$$(3) \qquad E(T) - E(P \vee H, T) > 0.$$

Alors étant donné $\varepsilon' > 0$, nous pouvons trouver une partition $\tilde{P}$ de X (à k éléments) telle que

(4) $d(\tilde{P}, I) < \varepsilon'$

(5) $E(\tilde{P} \vee H, T) > E(T) - \varepsilon'$

(6) $|P - \tilde{P}| < 6\varepsilon$

(7) $E(T) > E(\tilde{P} \vee H, T)$ (*sinon* $d(\tilde{P}) = d(I)$ *et* $E(\tilde{P}, T/(H)_T) = E(\tilde{P})$).

Démonstration. Les conditions (1) (2) (3) permettent de construire une application ϕ comme dans le lemme 3 mais où on remplace (3.5) par: pour tout x de K_n le I-n-nom de $\phi(x)$ est une $\varepsilon'/3k$-suite pour I.

Alors une démonstration identique à celle du lemme 4 permet de construire $\tilde{P}$ satisfaisant (4) (5) et (6). On prouve (7) en remarquant que si $E(T) = E(\tilde{P} \vee H, T)$, on peut construire un chemin continu $\tilde{P}_t$ $0 \leqq t \leqq 1$ avec $\tilde{P}_0 = \tilde{P}$ $d(\tilde{P}_1) = d(I)$ et $|\tilde{P} - \tilde{P}_t| < 6\varepsilon$ $d(\tilde{P}_t, I) < \varepsilon'$. Alors ou bien $E(\tilde{P}_1 \vee H, T) = E(T)$ et la formule de Pinsker assure que $E(\tilde{P}_1, T/H_T) = E(\tilde{P}_1)$, ou bien il existe un t_0 tel que (4) (5) (6) soient satisfaites pour $\tilde{P}_{t_0}$ et tel que $E(T) > E(\tilde{P}_{t_0} \vee H, T)$.

Proposition 2. *Soit T une transformation ergodique de X et H une partition de X. Soit I une partition abstraite à k éléments satisfaisant $E(I) = E(T) - E(H, T)$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si P' est une partition de X satisfaisant*:

(1) $$d(P', I) < \delta$$

(2) $$0 < E(T) - E(P' \vee H, T) < \delta.$$

Alors on peut trouver une partition P de X telle que

(3) $$|P' - P| < \varepsilon$$

(4) $d(P) = d(I)$. *Les partitions T^iP $i \in \mathbf{Z}$ sont indépendantes et*

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^iP \text{ est indépendante de } \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^iH.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon_n > 0$ tel que $\Sigma_1^\infty \varepsilon_n < \varepsilon$. On peut construire par récurrence, en utilisant le lemme 5 une suite P_n telle que, ou bien:

$$|P_n - P_{n-1}| < \varepsilon_{n-1} \text{ et } E(T) - \delta(\varepsilon_n) < E(P_n \vee H, T) < E(T)$$

$$d(P_n, I) < \delta(\varepsilon_n)$$

ou bien

$$|P_n - P_{n-1}| < \varepsilon_{n-1} d(P_n) = d(I) \text{ et } E(P_n, T/(H)_T) = E(P_n).$$

Si la seconde éventualité ne se présente jamais $P_n \to P$, si elle se produit pour $n = n_0$, on pose $P = P_{n_0}$ et dans tous les cas on est assuré de l'existence d'une partition P telle que $|P - P_1| < \varepsilon$ (on prend $P_1 = P'$, δ égal à $\delta(\varepsilon_1)$) et satisfaisant $d(P) = d(I)$, $E(P) = E(P, T/(H)_T)$. Or

$$E(P) = E(P, T/(H)_T) = \lim \downarrow \frac{1}{2n+1} E\Big(\bigvee_{-n}^{n} T^i P \,|\, (H)_T \Big) \leqq E(P).$$

Donc

$$E\Big(\bigvee_{-n}^{n} T^i P \,|\, (H)_T \Big) = (2n+1) E(P) = E\Big(\bigvee_{-n}^{n} T^i P \Big).$$

Ces égalités entraînent que pour tout n, $\bigvee_{-n}^{n} T^i P$ est indépendante de $(H)_T$; elles entraînent aussi que les $T^i P$, $i \in \mathbf{Z}$ sont indépendantes.

Proposition 2'. *Soit T une transformation ergodique de X et H une partition de X. Soit I une partition abstraite à k éléments satisfaisant $E(H, T) + E(I) \leqq E(T)$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe δ' tel que si P' est une partition de X satisfaisant*

(1) $$d(P', I) < \delta'$$

(2) $$|E(H, T) + E(I) - E(P' \vee H, T)| < \delta'.$$

Alors on peut trouver une partition P de X telle que

(3) $$|P' - P| < \varepsilon$$

(4) $d(P) = d(I)$, *les partitions $T^i P$, $i \in \mathbf{Z}$ sont indépendantes et*

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i P \text{ est indépendante de } \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i H.$$

Démonstration. Soit P'_t $0 \leqq t \leqq 1$ un chemin continu de partitions telles que $|P'_t - P'_0| < \delta'$, $P'_0 = P'$ et $d(P'_1) = d(I)$.

Alors ou bien il existe un t_0 tel que $E(H, T) + E(I) - E(P'_{t_0} \vee H, T) > 0$ et si δ' a été choisi suffisamment petit, on aura $\delta(\varepsilon/2) > E(H, T) + E(I) - E(P'_{t_0} \vee H, T)$ et la proposition 2 assure la conclusion, ou bien $E(H, T) + E(I) - E(P'_1 \vee H, T) = 0$ et on a $E(P'_1, T/(H)_T) = E(P'_1)$ $|P'_1 - P'| < \varepsilon$.

Le lemme et la proposition qui suivent donnent la structure des systèmes engendrés par la partition $P \vee H$ quand P est H-conditionnellement finiment déterminée.

LEMME 6. *Soit P_1 H_1-conditionnellement finiment déterminée dans (X_1, T_1). Soit $(B \vee H, T)$ tel que*

$$(H, T) \sim (H_1, T_1), \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i B \perp \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i H,$$

les $T^i B$ $i \in \mathbf{Z}$ soient indépendantes et

$$E(B \vee H, T) = E(P_1 \vee H_1, T_1).$$

Soit $X = \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i (B \vee H)$.

D'après la proposition 1, il existe P, partition de X, telle que $(P \vee H, T) \sim (P_1 \vee H_1, T_1)$.

Alors quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une partition P^* de X telle que

(1) $$(P^* \vee H, T) \sim (P_1 \vee H_1, T_1)$$

(2) $$\bigvee_{-K}^{K} T^i (P^* \vee H) \overset{\varepsilon}{\supset} H \vee B \text{ pour un entier } K$$

(3) $$|P - P^*| < \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION. Comme $B \vee H$ est génératrice pour T nous pouvons choisir K_1 tel que

(1) $$\bigvee_{-K_1}^{K_1} T^i (B \vee H) \overset{\varepsilon/10}{\supset} P.$$

En appliquant la proposition 2 à T agissant sur $X_{P \vee H}$, on a qu'il existe δ tel que si B' est une partition dans $X_{P \vee H}$ vérifiant

(2) $$d(B', B) < \delta$$

(3) $$0 < E(T) - E(B' \vee H, T) < \delta.$$

Alors il existe une partition B_1 dans $X_{P \vee H}$ telle que

(4) $$|B_1 - B'| < \frac{\varepsilon}{30 K_1},$$

(5) $$(B_1, T) \sim (B, T) \text{ et } \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i B_1 \perp \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i H.$$

Choisissons $\varepsilon_1 < \inf(\delta, \varepsilon)$ tel que si P' est une partition ayant le même nombre d'éléments que P, alors (6) $|P' - P| < 2\varepsilon_1$ entraîne

$$|E(P' \vee H, T) - E(P \vee H, T)| < \delta.$$

Choisissons $K_2 > K_1$ tel que

(7) $$\bigvee_{-K_2}^{K_2} T^i (B \vee H) \overset{\varepsilon_1/10}{\supset} P.$$

Choisissons n_1 tel que

(8) $$\frac{K_2}{n_1} < \frac{\varepsilon_1}{100}.$$

En utilisant le théorème de Rokhlin nous pouvons construire un ensemble F dans $X_{P \vee H}$ tel que les $T^i F$ $0 \leqq i \leqq n_1$ soient disjoints et que $X_1 = \bigcup_0^{n_1} T^i F$ vérifie

(9) $$m(X_1) > 1 - \frac{\varepsilon_1}{100}.$$

Soit G le gadget formé à partir de $T^i F$, $0 \leqq i \leqq n_1$ en partitionnant chaque $T^i F$ par $P \vee H$.

Soit G'_1 pour désigner G comme un gadget dans X et G'_2 pour désigner G comme un gadget dans $X_{P \vee H}$.

Alors $G'_1 \sim G'_2$. Formons le gadget G_1 à partir de $T^i F$ $0 \leqq i \leqq n_1$ en partitionnant chaque $T^i F$ par $P \vee H \vee B$. Alors G_1 est un gadget dans X. Nous pouvons choisir une partition B' dans $X_{P \vee H}$ de façon à former un gadget G_2 à partir de $T^i F$ $0 \leqq i \leqq n_1$ en partitionnant chaque $T^i F$ par $P \vee H \vee B'$ de façon que (10) $G_1 \sim G_2$.

Ceci définit B' sur X_1. Nous pouvons maintenant définir B' sur $X - X_1$ de façon que $E(B' \vee H, T) < E(B \vee H, T)$. Pour le faire nous définissons d'abord B' sur $X - X_1$ de façon que $d(B') = d(B)$. Comme $E(B')$ n'a pas de minimum local nous pouvons changer B' sur un ensemble arbitrairement petit et abaisser son entropie. En outre le changement peut être fait sur $X - X_1$ si chaque atome de B a une intersection non nulle avec $X - X_1$. Ceci peut être fait en choisissant F convenablement (par exemple en utilisant le lemme 2).

Ainsi nous pouvons supposer

(11) $$E(B' \vee H, T) \leqq E(B') + E(H, T) < E(B) + E(H, T) = E(T).$$

Maintenant (1) entraîne qu'il existe une partition L de S_{K_1} telle que

(12) $$|L_{B \vee H} - P| < \frac{\varepsilon}{10}$$

(12), (10) et (9) entraînent

(13) $$|L_{B' \vee H} - P| < \frac{2\varepsilon}{10}$$

(7), (8), (9) et (10) entraînent

$$(14)\qquad \bigvee_{-K_2}^{K_2} T^i(B'\vee H) \overset{2\varepsilon_1/10}{\supset} P$$

(10) et (9) entraînent

$$(15)\qquad d(B,B') < \frac{\varepsilon_1}{100} < \delta.$$

Ainsi (15) entraîne (2), tandis que (14) et (6) entraînent (3). Donc nous obtenons B_1 dans $X_{P\vee H}$ vérifiant (4) et (5).

Maintenant (4) et (13) entraînent

$$(16)\qquad |L_{B_1\vee H} - P| < \frac{3\varepsilon}{10}.$$

Nous choisissons ensuite $K_3 > K_2$ tel que

$$(17)\qquad \bigvee_{-K_3}^{K_3} T^i(P\vee H) \overset{\varepsilon/10}{\supset} B_1.$$

D'après la proposition 1, il existe δ_2 et un entier positif n tel que si P' vérifie

$$(18)\qquad d\left(\bigvee_0^n T_1^i(P_1\vee H_1),\ \bigvee_0^n T^i(P'\vee H)\right) < \delta_2$$

$$(19)\qquad 0 < E(T) - E(P'\vee H, T) < \delta$$

alors il existe P'' dans $X_{P\vee H}$ telle que

$$(20)\qquad (P''\vee H, T) \sim (P_1\vee H_1, T_1)$$

$$(21)\qquad |P'' - P'| < \frac{\varepsilon}{30K_3}.$$

Choisissons $\varepsilon_2 < \inf(\delta_2, \varepsilon)$ tel que si B_2 et B ont le même nombre d'éléments, alors

$$(22)\qquad |B_2 - B| < \varepsilon_2 \text{ entraîne } |E(B_2\vee H, T) - E(B\vee H, T)| < \delta_2.$$

Choisissons $K_4 > K_3$ tel que

$$(23)\qquad \bigvee_{-K_4}^{K_4} T^i(P\vee H) \overset{\varepsilon_2/10}{\supset} B_1.$$

Choisissons n_2 tel que (24) $(K_4/n_2) < (\varepsilon_2/100)$ et $(n/n_2) < (\varepsilon_2/100)$. D'après le lemme 2 nous pouvons trouver un ensemble E tel que les T^iE $0 \leqq i \leqq n_2$ soient disjoints et

(25) $$m\left(\bigcup_{i=0}^{n_2} T^iE\right) > 1 - \frac{\varepsilon_2}{100} \text{ et enfin}$$

(26) $$d\left(\bigvee_0^{n_2} T^{-i}(B_1 \vee H) \,|\, E\right) = d\left(\bigvee_0^{n_2} T^{-i}(B_1 \vee H)\right).$$

Nous pouvons aussi trouver un ensemble E_1 tel que les T^iE_1 $0 \leqq i \leqq n_2$ soient disjoints et

(27) $$m\left(\bigcup_{i=0}^{n_2} T^iE_1\right) > 1 - \frac{\varepsilon_2}{100}.$$

(28) $$d\left(\bigvee_0^{n_2} T^{-i}(B \vee H) \,|\, E_1\right) = d\left(\bigvee_0^{n_2} T^{-i}(B \vee H)\right).$$

Soit G_3' le gadget formé en partitionnant chaque T^iE $0 \leqq i \leqq n_2$ par $B_1 \vee H$. Soit G_4' le gadget formé en partitionnant chaque T^iE_1 $0 \leqq i \leqq n_2$ par $B \vee H$. Alors (5), (26) et (28) entraînent $G_3' \sim G_4'$. Soit G_3 le gadget formé à partir de T^iE $0 \leqq i \leqq n_2$ en partitionnant chaque T^iE par $B_1 \vee H \vee P$. Choisissons P' tel que si G_4 est le gadget formé à partir de T^iE_1 $0 \leqq i \leqq n_2$ en partitionnant chaque T^iE_1 par $B \vee H \vee P'$, alors (29) $G_3 \sim G_4$.

La même méthode que celle qui a été employée à la fin du lemme 4 peut être employée pour assurer (30) $E(P' \vee H, T) < E(T)$. (29), (27) et (25) entraînent (18).

(17), (23) et (24) entraînent

(31) $$\bigvee_{-K_3}^{K_3} T^i(P' \vee H) \overset{2\varepsilon/10}{\supset} B$$

(32) $$\bigvee_{-K_4}^{K_4} T^i(P' \vee H) \overset{2\varepsilon_2/10}{\supset} B$$

(32) et (22) entraînent (19). Ainsi nous obtenons P^* vérifiant (20) et (21). (21) et (31) entraînent

(33) $$\bigvee_{-K_3}^{K_3} T^i(P^* \vee H) \overset{3\varepsilon/10}{\supset} B$$

Donc (33) entraîne la conclusion (2) avec $K = K_3$. (20) entraîne la conclusion (1). Pour obtenir (3) remarquons que (16), (29), (25) et (27) entraînent que

(34) $$|L_{B\vee H} - P'| < \frac{4\varepsilon}{10}.$$

(34) et (21) entraînent

(35) $$|L_{B\vee H} - P^*| < \frac{5\varepsilon}{10}.$$

(35) et (12) entraînent $|P - P^*| < \varepsilon$.

PROPOSITION 3. *Soit P_1 H_1–conditionnellement finiment déterminée dans (X_1, T_1). Soit $(B\vee H, T)$ tel que $(H, T) \sim (H_1, T_1)$, $\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^iB \perp \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^iH$, les T^iB $i \in \mathbf{Z}$ soient indépendantes et $E(B\vee H, T) = E(P_1\vee H_1, T_1)$. Soit $X = \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i(B\vee H)$. Soit P telle que $(P\vee H, T) \sim (P_1\vee H_1, T_1)$. Alors étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une partition P^* de X telle que*

(1) $$(P^*\vee H, T) \sim (P_1\vee H_1, T_1)$$

(2) $$\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i(P^*\vee H) \supset B$$

(3) $$|P - P^*| < \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION. Le lemme 5 dit qu'on peut trouver

$$P_1^* \text{ et } K_1 \text{ tels que } |P_1^* - P| < \varepsilon_1, (P_1^*\vee H, T) \sim (P\vee H, T)$$

et

$$\bigvee_{-K_1}^{K_1} T^i(P_1^*\vee H) \overset{\varepsilon_1/2}{\supset} B.$$

Soit ε_2 plus petit que $\varepsilon_1/4$ tel que la relation précédente et $|P_1^* - P_2^*| < \varepsilon_2$ entraînent $\bigvee_{-K_1}^{K_1} T^i(P_2^*\vee H) \supset^{\varepsilon_1/2+\varepsilon_1/4} B$.

Le lemme précédent dit qu'on peut choisir P_2^* de façon à ce qu'en plus $\bigvee_{-K_2}^{K_2} T^i(P_2^*\vee H) \supset^{\varepsilon_1/4} B$ et $(P_2^*\vee H, T) \sim (P\vee H, T)$. On peut supposer par récurrence qu'on a $K_1, \cdots, K_n$ tels que $(P_j^*\vee H, T) \sim (P\vee H, T)$ $1 \leqq j \leqq n$ $\bigvee_{-K_j}^{K_j} T^i(P_n^*\vee H) \supset^{\varepsilon_1/2^j+\cdots+\varepsilon_1/2^n} B$ $1 \leqq j \leqq n$.

Alors si $|P_{n+1}^* - P_n^*| < \varepsilon_{n+1}$ (on choisit $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_1/2^{n+1}$)

$$\bigvee_{-K_j}^{K_j} T^i(P_{n+1}^*\vee H) \overset{\varepsilon_1(1/2^j+\cdots+1/2^{n+1})}{\supset} B \quad 1 \leqq j \leqq n$$

et on peut en outre imposer à P_{n+1}^* que $\bigvee_{-K_{n+1}}^{K_{n+1}} T^i(P_{n+1}^*\vee H) \supset^{\varepsilon_1/2^{n+1}} B$ et $(P_{n+1}^*\vee H, T) \sim (P\vee H, T)$. Alors $P_n^* \to P^*$ vérifiant (1), (2) et (3).

On considère le système produit d'un système donné par un schéma de Bernoulli et on cherche à décrire la structure de ses facteurs. Les premiers éléments de la solution sont donnés dans les propositions qui suivent.

PROPOSITION 4. *Soit (X, T) un système dynamique ergodique et B et H deux partitions de X telles que*

(1) $$X = \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i(B \vee H)$$

(2) $$\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^iB \perp \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^iH$$

(3) *Les T^iB $i \in \mathbf{Z}$ sont indépendantes.*

Soit P une partition finie de X, alors P est H-conditionnellement finiment déterminée.

DÉMONSTRATION. $\varepsilon > 0$ étant donné, il s'agit de trouver un nombre $\delta > 0$ et un entier n tels que si $\bar{T}$ est un automorphisme ergodique de $\bar{X}$ et si H' et P' sont deux partitions de $\bar{X}$ satisfaisant

(1) $$d\Big(\bigvee_0^m \bar{T}^iH'\Big) = d\Big(\bigvee_0^m T^iH\Big) \text{ pour tout } m$$

(2) $$d\Big(\bigvee_0^n \bar{T}^i(P' \vee H'), \bigvee_0^n T^i(P \vee H)\Big) < \delta$$

(3) $$|E(P \vee H, T) - E(P' \vee H', \bar{T})| < \delta$$

alors il existe Z et pour tout entier $p > 0$, des suites de partitions de Z, H_i, P_i, P_i^*, $0 \leqq i \leqq p$ telles que

(4) $$d\Big(\bigvee_0^p T^i(P \vee H)\Big) = d\Big(\bigvee_0^p (P_i \vee H_i)\Big)$$

(5) $$d\Big(\bigvee_0^p \bar{T}^i(P' \vee H')\Big) = d\Big(\bigvee_0^p (P_i^* \vee H_i)\Big)$$

(6) $$|P_i - P_i^*| < \varepsilon.$$

En appliquant la proposition 2, on peut trouver une partition I de X telle que

(7) $$E(I) = E(T) - E(P \vee H, T)$$

(8) $$\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^iI \perp \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i(P \vee H)$$

(9) Les T^iI sont indépendantes.

(10) Soit I' une partition idéale telle que $d(I') = d(I)$.

Soit $Y_1 = I'^{\mathbf{Z}}$ et S_1 sur Y_1 le schéma de Bernoulli. Si $E(P' \vee H', T') < E(P \vee H, T)$ soit J une partition ideale telle que

$$E(J) = E(P \vee H, T) - E(P' \vee H', T').$$

Soit $Y_2 = J^{\mathbf{Z}}$ et S_2 sur Y_2 le schéma de Bernoulli. Soit $Z = \bar{X} \times Y_1 \times Y_2$ muni de l'automorphisme $T_1 = \bar{T} \times S_1 \times S_2$. Alors $E(T_1) \geqq E(T)$.

(11) Soit N_1 tel que $\bigvee_{-N_1}^{N_1} T^i (B \vee H) \overset{\varepsilon/100}{\supset} P$.

En utilisant la proposition 2', on a que si B' est une partition de Z telle que

(12) $d(B', B) < \delta_1$

(13) $|E(B' \vee H', T_1) - E(B \vee H, T)| < \delta_1$.

Alors il existe une partition B_1 de Z telle que

(14) $(B_1 \vee H', T_1) \sim (B \vee H, T)$ et

(15) $|B_1 - B'| < \dfrac{\varepsilon}{100 N_1}$.

(16) Soit δ_2 tel que si $|E(P \vee H, T) - E(P' \vee H', T')| < \delta_2$

il existe $\varepsilon_1 < \delta_1$ tel que si pour un certain K, $\bigvee_{-K}^{K} T_1^i (B' \vee H')$ contient une partition Q telle que $|Q - P' \vee H' \vee I'| < \varepsilon_1$, alors

$$|E(B \vee H, T) - E(B' \vee H', T_1)| < \delta_1.$$

(17) Soit $N_2 \geqq N_1$ tel que $\bigvee_{-N_2}^{N_2} T^i (B \vee H) \overset{\varepsilon_1/100}{\supset} P \vee H \vee I$.

(18) Soit N_3 tel que $\dfrac{N_2}{N_3} < \dfrac{\varepsilon_1}{100}$.

(19) Soit δ_3 tel que si r est la plus petite mesure non nulle d'un atome de $\bigvee_0^{N_3} T^{-i}(P \vee H)$, $\delta_3 < r\varepsilon_1/100$.

(20) Soit $n = N_3$, $\delta = \inf(\delta_3, \delta_2)$. Remarquons que

$$d\left(\bigvee_0^n T^i (P \vee H \vee I), \bigvee_0^n T_1^i (P' \vee H' \vee I') \right) = d\left(\bigvee_0^n T^i (P \vee H), \bigvee_0^n T'^i (P' \vee H') \right).$$

(21) Le lemme 2 assure qu'on peut trouver F dans X tel que les T^iF $0 \leqq i \leqq n$ soient disjoints et $m(\bigcup_0^n T^iF) > 1 - \varepsilon_1/100$ et

$$d\left(\bigvee_0^n T^{-i}(P \vee H \vee I) \mid F \right) = d\left(\bigvee_0^n T^{-i}(P \vee H \vee I) \right).$$

(22) Le lemme 2 assure qu'on peut trouver F_1 dans Z tel que les T^iF_1 $0 \leqq i \leqq n$ soient disjoints et $m(\bigcup_0^n T_1^i F_1) > 1 - \varepsilon_1/100$ et

$$d\left(\bigvee_0^n T_1^{-i}(P' \vee H' \vee I') \mid F_1 \right) = d\left(\bigvee_0^n T_1^{-i}(P' \vee H' \vee I') \right).$$

(22) et (19) entraînent: (23). Il existe $F' \subset F_1$ tel que

$$m\left(\bigcup_0^n T_1^i F' \right) > 1 - \frac{2\varepsilon_1}{100}$$

et

$$d\left(\bigvee_0^n T_1^{-i}(P' \vee H' \vee I') \mid F' \right) = d\left(\bigvee_0^n T^{-i}(P \vee H \vee I) \mid F \right).$$

Soit G le gadget formé en partitionnant chaque T^iF $0 \leqq i \leqq n$ par $P \vee H \vee I$. Soit $\bar{G}$ le gadget formé en partitionnant chaque T_1^iF' $0 \leqq i \leqq n$ par $P' \vee H' \vee I'$. Alors G et $\bar{G}$ sont isomorphes.

Soit G_1 le gadget formé en partitionnant chaque T^iF par $P \vee H \vee I \vee B$. Choisissons B' dans Y de façon à former un gadget $\bar{G}_1$ isomorphe à G_1 en partitionnant chaque T_1^iF'par $P' \vee H' \vee I' \vee B'$.

(23) (22) et (21) entraînent que B' vérifie (16) (avec $K = N_2$). (23) entraîne (12). Il existe donc B_1 vérifiant (14) et (15).

Soit P^* correspondant à P dans l'isomorphisme (14).

(23) et (11) entraînent qu'il existe $L_{B' \vee H'}$ dans $\bigvee_{-N_1}^{N_1} T_1^i (B' \vee H')$ telle que (24) $|L_{B' \vee H'} - P'| < 2\varepsilon/100$.

(15) entraîne que (25) $|L_{B_1 \vee H'} - P'| < 3\varepsilon/100$.

(11) entraîne que (26) $|L_{B_1 \vee H'} - P^*| < \varepsilon/100$.

(25) et (26) entraînent $|P^* - P'| < \varepsilon$.

Alors les $P_i^* = T_1^iP^*$ vérifient (4), (5) et (6).

Comme corollaire de la proposition 3 et de la proposition 4 on a la

Proposition 5. *Soit (X, T) un système dynamique ergodique et B et H deux partitions de X telles que*:

$$X = \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i(B \vee H) \tag{1}$$

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i B \perp \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i H \tag{2}$$

(3) *Les T^iB $i \in \mathbf{Z}$ sont indépendantes.*

Soit P une partition finie de X; il existe une partition B' de X telle que:

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i(P \vee H) = \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i(H \vee B') \tag{4}$$

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i H \perp \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i B' \tag{5}$$

(6) *Les T^iB' $i \in \mathbf{Z}$ sont indépendantes.*

COROLLAIRE 5.1. *Soit (X, T) un système dynamique ergodique et B et H deux partitions de X vérifiant* (1), (2) *et* (3) *de la proposition* 5.

Soit P une partition génératrice d'un facteur de (X, T) contenant le facteur engendré par $H((P)_T \supset (H)_T)$. Alors si $E(P, T) = E(H, T)$ on a en fait $(P)_T = (H)_T$ (P est $(H)_T$-mesurable).

DÉMONSTRATION. Elle résulte immédiatement de la proposition 4 et du corollaire 1.1.

REMARQUE. Ce résultat peut être prouvé directement par des méthodes plus simples. Il est toujours vrai si on suppose simplement que B engendre un K-système (cf. [1]). La méthode donnée ici, par contre, s'applique également pour donner le résultat dans le cas d'une action de $\mathbf{Z}^n$.

PROPOSITION 6. *On considère une action de $\mathbf{Z}^n$ d'entropie finie h sur X. Il existe alors une partition génératrice P ayant un nombre fini d'éléments p. On peut montrer que $p \leqq (2^h) + 2$.*

DÉMONSTRATION. On peut supposer que $n = 2$, il n'y a en plus que des difficultés de notations à considérer le cas général.

(1) Il existe une partition Q engendrant un schéma de Bernoulli généralisé d'entropie h, possédant un nombre d'éléments égal à $(2^h) + 1 = l$ soit $Q = (q_0, q_1, \cdots, q_{l-1})$.

(2) On subdivise l'atome q_0 en deux atomes q_0^1 et q_0^2 de mesure positive de manière quelconque. Soit $\tilde{Q} = (q_0^1, q_0^2, q_1, \cdots, q_{l-1})$. Soient S et T deux

générateurs de l'action de $\mathbf{Z}^2$ sur X. Soit C_n le carré $(0,n)\times(0,n)$ dans $\mathbf{Z}^2$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une action de $\mathbf{Z}^2$ sur un espace Y ayant la propriété suivante:

On peut trouver un espace Z et pout tout entier $n > 0$, une suite de partitions de Z, $\tilde{Q}(p,q)$ et $Q^*(p,q)$ avec $(p,q)\in C_n$ ainsi que deux générateurs S_1 et T_1 de l'action de Z^2 sur Y et une partition Q^* de Y à $(l+1)$ éléments tels que:

$$(\alpha)\qquad d\left(\bigvee_{(p,q)=(0,0)}^{(p,q)=(n,n)} S^pT^q\tilde{Q}\right)=d\left(\bigvee_{(p,q)=(0,0)}^{(p,q)=(n,n)}\tilde{Q}(p,q)\right)$$

où les deux partitions sont ordonnées en décrivant le carré C_n en croissant pour l'ordre lexicographique

$$(\beta)\qquad d\left(\bigvee_{(p,q)=(0,0)}^{(p,q)=(n,n)} S^pT^qQ^*\right)=d\left(\bigvee_{(p,q)=(0,0)}^{(p,q)=(n,n)}Q^*(p,q)\right)$$

(γ) pour tout $(p,q)\in C_n$ $|Q^*(p,q)-\tilde{Q}(p,q)|<\dfrac{\varepsilon^2}{3}$

(δ) $E(Q^*,S_1,T_1)>E(\tilde{Q},S,T)$

(ε) Si $Q^*=(q_0^{*1},q_0^{*2},q_1^*,\cdots,q_{l-1}^*)$ et si on pose

$\hat{Q}=(q_0^*,q_1^*,q_2^*,\cdots,q_{l-1}^*)$ avec $q_0^*=q_0^{*1}\cup q_0^{*2}$ alors:

$\hat{Q}(p,q)=Q(p,q)$ pour tout $(p,q)\in C_n$.

C'est le corollaire 5.1. qui nous permettra d'arriver à ce résultat.

Soit I une partition d'entropie finie, σ_1 et τ_1 les deux générateurs du schéma de Bernoulli généralisé sur $I^{\mathbf{Z}^2}=X_1$; nous prolongeons S et T en S_1 et T_1 sur $Y=X\times X_1$ de la manière suivante: $S_1(u,v)=(Su,\sigma_1v)$, $T_1(u,v)=(Tu,\tau_1v)$. Soit $\varepsilon>0$; soit dans X_1 un ensemble A tel que $m(A)=1-\varepsilon^2/3$.
Soit

$$q_0^{*1}=q_0^1\cap A$$

$$q_0^{*2}=q_0^2\cup(q_0^1\cap A^c)$$

$$q_i^*=q_i\quad 1\leqq i\leqq l-1.$$

La partition Q^* de Y ainsi obtenue et l'action de $\mathbf{Z}^2$ définie par S_1 et T_1 sur Y satisfont à toutes les conditions cherchées. (La condition (δ) provient de 5.1.)

(3) On a maintenant le résultat suivant: Soit P une partition finie de X. Une partition $\tilde{Q}$ étant donnée, pour tout $\delta>0$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une partition $\tilde{Q}_1$ de même forme que $\tilde{Q}$ (i.e. $\tilde{Q}_1=(q_{0,1}^1,q_{0,1}^2,q_1,\cdots,q_{l-1})$) telle que $|\tilde{Q}_1-\tilde{Q}|<8\varepsilon$ et que

$$\bigvee_{(p,q)\in D_N} S^p T^q \tilde{Q}_1 \overset{\delta}{\supset} P$$

pour un certain entier N où D_N désigne le carré $-N \leqq p \leqq N$, $-N \leqq q \leqq N$ de $\mathbf{Z}^2$.

En utilisant une procédure analogue à celle qui est utilisée dans le lemme 3, on peut trouver un entier $n > 0$ et une famille d'atomes

$$K_n \text{ dans } \bigvee_{(p,q)\in E_n} S^p T^q (P \vee \tilde{Q}) \quad \left(E_n = \left\{(p,q) \in \mathbf{Z}^2 \begin{array}{l} -n+1 \leqq p \leqq 0 \\ -n+1 \leqq q \leqq 0 \end{array}\right\}\right)$$

dont la réunion a une mesure plus grande que $1-\delta/10$ et une application ϕ de K_n dans l'ensemble des atomes de

$$\bigvee_{(p,q)\in E_n} S_1^p T_1^q (Q^*)$$

telle que

(α) ϕ est injective

(β) Le $\hat{Q}$-n-nom de $\phi(x)$ est le mêre que le Q-n-nom de x (avec une modification évidente pour la définition du -n-nom).

(γ) Pour une famille d'atomes $L_n \subset K_n$ dont la réunion a une mesure plus grande que $1-\varepsilon$ le $\tilde{Q}$-n-nom de x diffère du Q^*-n-nom de $\phi(x)$ en moins de $n^2\varepsilon$ endroits.

((β) résulte de (2) (ε)).

On peut trouver, en utilisant le théorème 4 de [2] un ensemble F de X mesurable par rapport à la tribu

$$\bigvee_{(p,q)\in \mathbf{Z}^2} S^p T^q Q$$

tel que les $S^p T^q F$ soient disjoints pour $(p,q) \in C_n$ et

$$m\Big(\bigcup_{(p,q)\in C_n} S^p T^q F\Big) > 1 - \frac{\delta}{10}$$

En translatant au besoin F on peut aussi avoir

$$m\Big(\bigcup_{(p,q)\in C_n} S^p T^q (F_1 \cap K_n)\Big) > 1 - \frac{3\delta}{5}$$

$$m(F_1 \cap K_n - F_1 \cap L_n) < \frac{3\varepsilon}{n^2}$$

(Pour démontrer ceci on prend F_1 dans l'intersection des deux ensembles suivants:

$$\left\{ S^pT^qF \,|\, (p,q) \in C_n \text{ et } m(S^pT^qF \cap (X - K_n)) < \frac{3\delta}{10n^2} \right\}$$

et

$$\left\{ S^pT^qF \,|\, (p,q) \in C_n \text{ et } m(S^pT^qF \cap (K_n - L_n)) < \frac{3\varepsilon}{n^2} \right\}.$$

Comme les deux parties correspondantes de C_n comportent chacune plus que $2n^2/3$ éléments, les deux ensembles ont au moins un élément commun F_1). En employant la technique de codage du lemme 4, on construit maintenant $\tilde{Q}_1$ qui satisfait à $|\tilde{Q}_1 - \tilde{Q}| < 8\varepsilon$ et $\tilde{Q}_1 \supset Q$. (la première condition résulte de (3) (γ) et la deuxième de (3) (β)).

Si R est la partition $\{F, F^c\}$, (3) (α) entraîne que

$$\bigvee_{(p,q)\in D_n} (S^pT^q(\tilde{Q}_1 \vee R)) \overset{3\delta/5}{\supset} P.$$

Comme $\tilde{Q}_1 \supset Q$ et comme F, donc R, est $\bigvee_{(p,q)\in Z^2} S^pT^qQ$ mesurable, on est assuré de l'existence d'un N tel que

$$\bigvee_{(p,q)\in D_N} (S^pT^q\tilde{Q}_1) \overset{\delta}{\supset} P.$$

(4) Soit P_n une suite croissante de partitions finies telles que $\bigvee_{n=1}^{\infty} P_n = X$. On construit alors facilement par récurrence une suite de partitions $\tilde{Q}_N$ telles que:

$$\bigvee_{(p,q)\in D_{N(j)}} S^pT^q\tilde{Q}_N \overset{\delta_1/2^j + \cdots + \delta_1/2^N}{\supset} P_j \quad 1 \leqq j \leqq N$$

$|\tilde{Q}_N - \tilde{Q}_{N+1}| < \delta_1/2^N$. Alors $\tilde{Q}_N \to \tilde{Q}_\infty$ qui est génératrice.

Definition 2. Soient (X, S) et (Y, T) deux systèmes dynamiques. On suppose qu'il existe deux partitions finies H de X et H^0 de Y telles que $(H, S) \sim (H^0, T)$. Soit P une partition finie à k éléments de X et Q une partition finie à k éléments de Y. On dit qu'un n-quadruplet $(Z, P'_i\ 0 \leqq i \leqq n-1,$ $Q'_i\ 0 \leqq i \leqq n-1,$ $H'_i\ 0 \leqq i \leqq n-1)$ où les P'_i, Q'_i, H'_i sont des partitions de Z, contient P et Q (H, H^0)-conditionnellement si

$$d\left(\bigvee_0^{n-1} S^iH\right) = d\left(\bigvee_0^{n-1} H'_i\right) \ \left(= d\left(\bigvee_0^{n-1} T^iH^0\right)\right),$$

$$d\left(\bigvee_0^{n-1} S^i(P \vee H)\right) = d\left(\bigvee_0^{n-1} (P'_i \vee H'_i)\right),$$

$$d\left(\bigvee_0^{n-1} T^i(Q \vee H^0)\right) = d\left(\bigvee_0^{n-1} (Q'_i \vee H'_i)\right).$$

On appelle $\mathcal{Q}_n$ l'ensemble des n-quadruplets qui contiennent P et Q (H, H^0)-conditionnellement et on pose

$$\bar{d}_{H,H^0}(P,Q) = \liminf_{n \geq 0, (Z, P'_i, Q'_i, H'_i) \in \mathcal{Q}_n} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |P'_i - Q'_i|.$$

La proposition qui suit montre en particulier que si (H, T_1) engendre un système dynamique ergodique et si (B, T_2) engendre un schéma de Bernoulli, alors l'ensemble des partitions de l'espace produit est fermé "au sens de $\bar{d}_{H,H}$".

PROPOSITION 7. *Soit (X_n, T_n) $n \geqq 0$ une suite de systèmes dynamiques ergodiques et H une partition finie dans un système dynamique ergodique (X, T). On suppose que pour tout $n \geqq 0$, il existe deux partitions de X_n; H_n et P_n telles que*

(1) $(H_n, T_n) \sim (H, T)$.

(2) *P_n est H_n-conditionnellement finiment déterminée.*

(3) $\bar{d}_{H_n, H_{n+1}}(P_n, P_{n+1}) < \varepsilon_n$ *et* $\sum_{n \geqq 0} \sqrt{\varepsilon_n} < +\infty$.

(4) *$P_n \vee H_n$ converge faiblement vers $P \vee H$ où P est une partition finie de X (i.e. pour tout $p > 0$ $d(\vee_0^p T_n^i(P_n \vee H_n), \vee_0^p T^i(P \vee H)) \to 0$ quand $n \to \infty$).*

Alors P est H-conditionnellement finiment déterminée.

DÉMONSTRATION.

(1) On peut trouver un schéma de Bernoulli (B, T_1) tel que si $Y_1 = \vee_{-\infty}^{\infty} T_1^i B$ et si $Y_2 = \vee_{-\infty}^{\infty} T^i H$, il existe dans le système produit $(Z, S) = (Y_1 \times Y_2, T_1 \times T)$, pour tout n une partition P'_n telle que $(P'_n \vee H, S) \sim (P_n \vee H_n, T_n)$ (on a identifié H avec son image dans l'espace produit $Y_1 \times Y_2$). Cela provient de la proposition 2 et du fait que $E(P_n \vee H_n, T_n)$ est bornée d'après (4).

(2) On a donc maintenant une suite de partitions P'_n de Z telles que (α) $\bar{d}_{H,H}(P'_n, P'_{n+1}) < \varepsilon_n$. On va montrer qu'il existe une suite de partitions Q_n de Z telles que pour tout $n > 0$

(β) $(Q_n \vee H, S) \sim (P'_n \vee H, S)$ et

(γ) $|Q_{n-1} - Q_n| < 4\sqrt{3\varepsilon_n}$.

Supposons par récurrence que $Q_0, \cdots, Q_n$ ont été construites satisfaisant (β) et (γ) et construisons Q_{n+1}. On peut supposer que $E(P'_n \vee H, S) \neq E(P'_{n+1} \vee H, S)$ (sinon on peut toujours se ramener à cette situation en faisant un petit changement de P'_{n+1} (cf. la fin de la démonstration du lemme 4)).

Soit tout d'abord $E(P'_n \vee H, S) > E(P'_{n+1} \vee H, S)$. Comme P'_n est H-conditionnellement finiment déterminée, on a qu'il existe N_n et δ_n tels que si

$$\text{(a)} \qquad d\left(\bigvee_0^{N_n} S^i (P'_n \vee H),\ \bigvee_0^{N_n} S^i (Q'_n \vee H) \right) < \delta_n$$

$$\text{(b)} \qquad \delta_n > E(P'_n \vee H, S) - E(Q'_n \vee H, S) > 0$$

il existe Q^*_n telle que $|Q^*_n - Q'_n| < \sqrt{3\varepsilon_n}$ et $(Q^*_n \vee H, S) \sim (P'_n \vee H, S)$.

Mais en raisonnant exactement comme dans les lemmes 3 et 4, et en utilisant (2) (α), on voit qu'on peut construire Q'_n vérifiant (a) et (b) et en plus $|Q'_n - P'_{n+1}| < \sqrt{3\varepsilon_n}$. Donc il existe Q^*_n telle que $|Q^*_n - P'_{n+1}| < 2\sqrt{3\varepsilon_n}$ et $(Q^*_n \vee H, S) \sim (P'_n \vee H, S)$. On peut changer Q^*_n en $\tilde{Q}_n$ et P'_n en $\tilde{P}_n$ de telle manière que $(\tilde{Q}_n \vee H, S) \sim (Q^*_n \vee H, S)$, $(P'_n \vee H, S) \sim (\tilde{P}_n \vee H, S)$, $|Q^*_n - \tilde{Q}_n| < \sqrt{3\varepsilon_n}$,

$|P'_n - \tilde{P}_n| < \sqrt{3\varepsilon_n}$ et l'isomorphisme défini par $(\tilde{Q}_n \vee H, S) \sim (\tilde{P}_n \vee H, S)$ se prolonge à (Z, S) tout entier. (Pour voir cela soit K_n telle que $(K_n)_S \perp (Q^*_n \vee H)_S$ et $E(K_n \vee Q^*_n \vee H, S) = E(S)$; de même soit J_n telle que $E(J_n \vee Q_n \vee H, S) = E(S)$, $(J_n)_S \perp (Q_n \vee H)_S$ et K_n et J_n engendrent des schémas de Bernoulli. Maintenant il existe d'après la proposition 3 deux partitions $\widetilde{K_n \vee Q^*_n}$ et $\widetilde{J_n \vee Q_n}$ telles que

$$|\widetilde{K_n \vee Q^*_n} - K_n \vee Q^*_n| < \sqrt{3\varepsilon_n}$$

$$|\widetilde{J_n \vee Q_n} - J_n \vee Q_n| < \sqrt{3\varepsilon_n}$$

$\widetilde{K_n \vee Q^*_n} \vee H$ ainsi que $\widetilde{J_n \vee Q_n} \vee H$ sont génératrices et

$$(\widetilde{K_n \vee Q^*_n} \vee H, S) \sim (K_n \vee Q^*_n \vee H, S)$$

$$(\widetilde{J_n \vee Q_n} \vee H, S) \sim (J_n \vee Q_n \vee H, S)).$$

Soit Q_{n+1} l'image de P'_{n+1} dans l'isomorphisme précédent. Alors:

$$|Q_{n+1} - Q_n| \leqq |Q_{n+1} - \tilde{Q}_n| + |\tilde{Q}_n - Q_n|.$$

Or:

$$|Q_{n+1} - \tilde{Q}_n| = |P'_{n+1} - \tilde{P}_n|$$

$$|P'_{n+1} - \tilde{P}_n| \leqq |P'_{n+1} - P'_n| + |P'_n - \tilde{P}_n|.$$

Donc:

$$|Q_{n+1} - Q_n| \leqq 4\sqrt{3\varepsilon_n}.$$

Si maintenant $E(P'_{n+1} \vee H, S) > E(P'_n \vee H, S)$ le même résultat est obtenu plus rapidement sans avoir besoin de recourir à l'isomorphisme ci-dessus.

(3) L'hypothèse (3) et (2) (γ) entraînent que $Q_n \to Q$ dans Z. L'hypothèse

(4) entraîne que $(Q \vee H, S) \sim (P \vee H, T)$. La proposition 4 entraîne la conclusion.

COROLLAIRE 7.1. *Soient deux partitions finies P et H dans (X, T) système dynamique ergodique. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe B_ε, partition finie de X, telle que B_ε engendre un schéma de Bernoulli, que $(B_\varepsilon)_T \perp (H)_T$ et que $\bigvee_{-N}^{N} T^i (B_\varepsilon \vee H) \supset^\varepsilon P$. Alors P est H-conditionnellement finiment déterminée.*

DÉMONSTRATION. On choisit une suite ε_n convenable et on est ramené à appliquer la proposition précédente avec $X_n = (B_{\varepsilon_n} \vee H)_T$ et $T_n = T$ pour tout n.

COROLLAIRE 7.2. *Soit (X, T) un système dynamique ergodique et P et H deux partitions de X telles que: (1) $(P \vee H)_T = X$ et (2) P est H-conditionnellement finiment déterminée. Soit R une partition génératrice finie d'un facteur du système engendré par H (i.e. R est $(H)_T$ mesurable).*

On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $n > 0$, il existe un système dynamique $(X_{\varepsilon,n}, T_{\varepsilon,n})$ possédant les propriétés suivantes: (3) Il existe une partition $H_{\varepsilon,n}$ de $X_{\varepsilon,n}$ telle que $(H_{\varepsilon,n}, T_{\varepsilon,n}) \sim (H, T)$ (soit $R_{\varepsilon,n}$ l'image de R par cet isomorphisme). (4) Il existe un schéma de Bernoulli engendré par une partition $B_{\varepsilon,n}$ de $X_{\varepsilon,n}$ telle que $(B_{\varepsilon,n})_T \mathrm{L} (R_{\varepsilon,n})_T$ et une partition $P_{\varepsilon,n}$ $(R_{\varepsilon,n} - B_{\varepsilon,n})_T$ mesurable telle que

$$d\left(\bigvee_0^n T^i(P \vee H), \bigvee_0^n T^i_{\varepsilon,n}(P_{\varepsilon,n} \vee H_{\varepsilon,n})\right) < \varepsilon$$

$$|E(P \vee H, T) - E(P_{\varepsilon,n} \vee H_{\varepsilon,n}, T_{\varepsilon,n})| < \varepsilon.$$

Alors P est R-conditionnellement finiment déterminée.

DÉMONSTRATION. Comme P est H-conditionnellement finiment déterminée, pour tout suite δ_p convenable $(\Sigma \sqrt{\delta_p} < +\infty)$, on peut trouver pour tout p, $\varepsilon(p)$ et $n(p)$ tels que la condition (4) entraîne:

$$\bar{d}_{H, H_{\varepsilon(p),n(p)}}(P, P_{\varepsilon(p),n(p)}) < \frac{\delta_p}{2}.$$

Par conséquent $\bar{d}_{R, R_{\varepsilon(p),n(p)}}(P, P_{\varepsilon(p),n(p)}) < \delta_p/2$. Et le résultat provient de la proposition (7).

QUESTIONS. A) Une question naturelle est de savoir, étant donnée une partition P H-conditionnellement finiment déterminée, s'il existe des facteurs du système engendré par H (strictement contenus dans celui-ci) par rapport auxquels P est encore conditionnellement finiment déterminée. En fait nous pensons que le résultat suivant est vrai: soit R une partition finie génératrice de $(P)_T \wedge (H)_T$. Alors P est R-conditionnellement finiment déterminée.

B) Une autre question "naturelle" est la suivante: soit P une partition génératrice finie d'un système dynamique (X, T). Soit $(\mathcal{H}_n)$ une suite décroissante de sous σ-algèbras T-invariantes de X, $\mathcal{H}_n \downarrow \mathcal{H}$. On suppose que pour tout n, P est H_n-conditionnellement finiment déterminée. (H_n désigne une partition génératrice finie de $\mathcal{H}_n$). Soit H une partition génératrice finie de $\mathcal{H}$. A-t-on encore que P est H-conditionnellement finiment déterminée?

D. S. Ornstein a prouvé que la réponse à cette question est négative en montrant qu'il existe un K-système (X, T) qui n'est pas isomorphe à un schéma de Bernoulli dans lequel on peut trouver deux suites de partitions B_n et H_n, $n \geqq 0$, telles que

(1) $(B_1)_T \vee (H_1)_T = X$

(2) $(B_1)_T \perp (H_1)_T$

(3) $T^i B_1$ $i \in \mathbf{Z}$ sont indépendantes

(4) $(H_{n-1})_T = (H_n)_T \vee (B_n)_T \quad (n \geqq 2)$

(5) $T^i B_n$ $i \in \mathbf{Z}$ sont indépendantes

(6) $\wedge_n (H_n)_T = \nu$

Dans son exemple D. S. Ornstein utilise les K-systèmes de [10]. Une question maintenant est de savoir s'il existe une décomposition de ce type dans tout K-système. (Avec la généralisation éventuelle à tout système dynamique ergodique en remplaçant (6) par (6'):

$$\wedge_n (H_n)_T = \Pi(T))$$

Bibliographie

1. K. Berg, *Convolution of invariant measures. Maximal entropy*, Math. Systems Theory **3** (1969), 146–151.

2. J. P. Conze, *Entropie d'un groupe abélien de transformations*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **25** (1972), 11–30.

3. Y. Katznelson, et B. Weiss, *Commuting measure preserving transformations*, Israel J. Math. **12** (1972), 161–173.

4. D. S. Ornstein, *Imbedding Bernoulli shifts in flows. Contribution to Ergodic Theory and Probability*, Lecture Notes in Mathematics Series, Springer-Verlag, Berlin, 1970, pp. 178–218.

5. A. N. Friedman, and D. S. Ornstein, *On isomorphism of weak Bernoulli transformations*, Advances in Math. **5** (1970), 365–394.

6. D. S. Ornstein, *Two Bernoulli shifts with infinite entropy are isomorphic*, Advances in Math. **5** (1970), 339–348.

7. D. S. Ornstein, *Factors of Bernoulli shifts are Bernoulli shifts*, Advances in Math. **5** (1970), 349–364.

8. D. S. Ornstein, *Some new results in the Kolmogorov-Sinai Theory of entropy and ergodic Theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 878–890.

9. D. S. Ornstein, *An application of ergodic theory to probability theory*, Ann. Probability **1** (1973), 43–65.

10. D. S. Ornstein and P. C. Shields, *An uncountable family of K automorphisms*, Advances in Math. **10** (1973), 63–88.

11. M. Smorodinsky, *Ergodic Theory, Entropy*, Lecture Notes in Mathematics, 1971, p. 214.

12. M. Smorodinsky, *A partition for a Bernoulli shift that is not weak Bernoulli*, Math. Systems Theory **5** (1971).

13. J. P. Thouvenot, *Convergence en moyenne de l'information pour l'action de $\mathbf{Z}^2$*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **24** (1972), 135–137.

Laboratoire de Calcul de Probabilités
9 Quai Saint Bernard — Tour 56
75230 Paris, France